

**1.**

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} -x^2 + 4x + 1 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^9 - 7x^3 + 10x^2 + 8 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 1)^5 (x^4 - 7) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} |7 - x| - 4x .$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} 9x - 1 - \frac{1}{2x^5 - 7} - x^4 ; \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 9}{3x - \sqrt{27}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x^2 + 3}{4x^5 - 2}$$

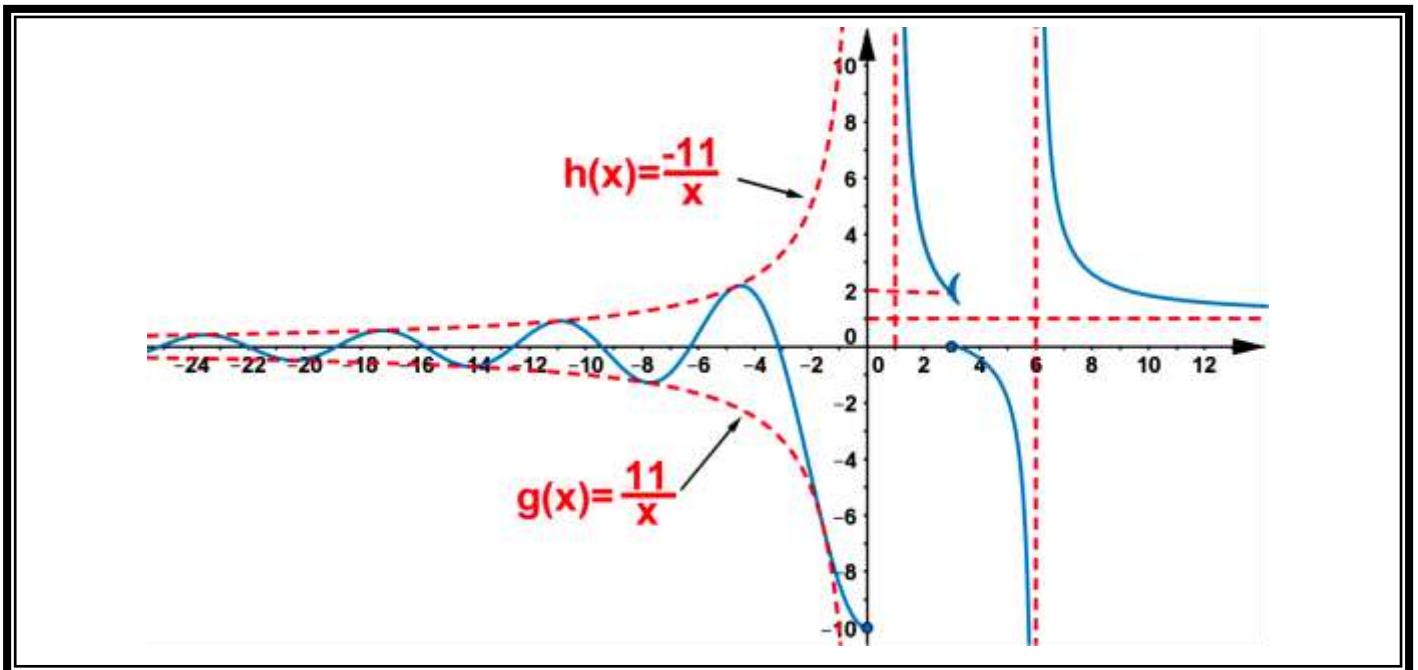
$$3. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{7x + 5}{x - 4} ; \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{5 - x}{x^2 - 25} .$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^4 + x + 3}{6x^4 - 3x + 4}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 1} - x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3} - 2x \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{3 - \sqrt{x + 6}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\tan(2x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(4x)}$$

2.

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f :



1. Déterminer graphiquement D_f le domaine de définition de la fonction f.

2. En déduire graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (justifier) puis interpréter ce dernier résultat .

3. ..

a. Est-ce que la fonction f est continue à gauche du point $x_0 = 0$.

b. Est-ce que la fonction f est continue à gauche du point $x_0 = 3$.

c. Est-ce que la fonction f est continue à droite du point $x_0 = 3$.

**3.**

1. Etudier la continuité de f en $x_0 = 5$ avec :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 25} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\} \\ f(5) = 8 \end{cases}$$

2. Etudier la continuité de f en $x_0 = -1$ avec :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{x^3 + 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

3. Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$ avec :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} ; x \in [0, +\infty[\setminus \{3\} \\ f(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

4. Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$ avec :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} ; x \in]0, 2[\cup]2, +\infty[\\ f(2) = 8\sqrt{2} \end{cases}$$

5. Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$ avec :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1} ; x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

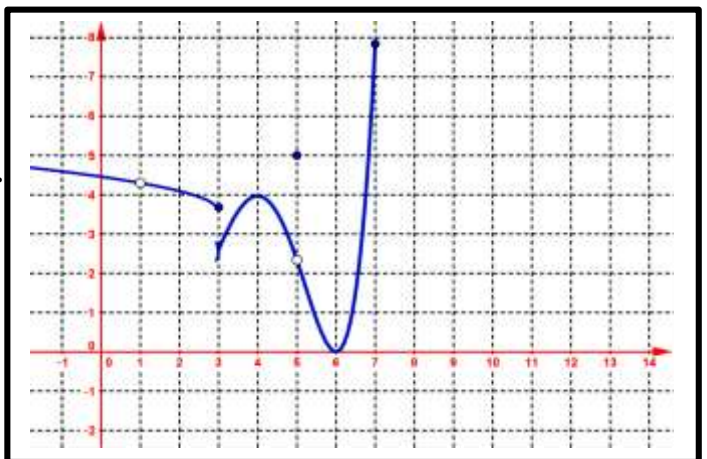
6. Etudier la continuité de f à droite de $x_0 = 0$ avec :

$$\begin{cases} f(x) = 2 \times \frac{1 - \cos x}{x^2} ; x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1 + \frac{1}{x}} ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

4.

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f

- 1.** Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires .
- 2.** Donner deux intervalles tel que on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires .
- 3.** Trouver un intervalle , on ne peut pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires .
- 4.** En déduire graphiquement le nombre des solutions $f(x) = 3$ puis donner un encadrement des solutions .

**5.**

Soit f la fonction numérique de la variable x définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^6 + 2x^4 - 1$.

- 1.** Montrer que : l'équation $x^6 + 2x^4 - 1 = 0$ admet au moins une solution sur $]0; 1[$.



2. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

- Dresser le tableau de variations de g sur \mathbb{R} .
- Montrer que : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} on note cette solution par α . déterminer un encadrement de α .
- Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[1, +\infty[$.

6.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x+1} ; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f(x) = 2x+ax^2 ; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$
 avec a est réel donné.

1. Déterminer la valeur de a pour que f est continue en $x_0 = \frac{1}{2}$.

7.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie et continue sur \mathbb{R} dont le tableau est le suivant :

x	$-\infty$	-6	-2	5	7	$+\infty$
$f(x)$	1		7		-2	$-\infty$
		\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow
		-10		-4		$-\infty$

- Déterminer le nombre des solutions : $x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$.
- Déterminer le nombre des solutions : $x \in]-\infty, 5] / f(x) = 3$.
- Déterminer la valeur de la solution $x \in \mathbb{R} / f(x) = 7$.
- Déterminer : $f(]-\infty; -6])$ et $f(]-\infty; -2])$ et $f([-6, -2])$ et $f(]7, +\infty[)$ et $f(\mathbb{R})$.
- Est-ce qu'une restriction g de la fonction f sur $I =]-\infty, -6]$ admettra une fonction réciproque.
- Est-ce qu'une restriction h de la fonction f sur $I =]-2, 7[$ admettra une fonction réciproque.

8.

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$.

- Dresser le tableau de variations de g sur \mathbb{R} .
- Montrer que : l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes dans \mathbb{R} .

9.

- Montrer que : $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{3^9} \times 2^8 = 6$.
- Mettre le dominateur rationnel $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-1}$.

10.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :



1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

2. $f(x) = \sqrt[5]{(x+7)(x-1)}$.

3. $f(x) = \sqrt[3]{4-x} - \sqrt{x+1}$.

11.

1. On considère l'équation suivante : (E) : $\sqrt[3]{x+1} - 2 = 0$

a. Déterminer l'ensemble de définition de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Résoudre l'équation : $(x+5)^3 = 2$.

12.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x^4 + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt[6]{4-x}}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{\sqrt[5]{x-2}}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4 + x + 1} - \sqrt[5]{x^6 + 2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27 + x^2} - 3}{x^2}$.

13.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par : $f(x) = x - \sqrt[3]{1+x}$.

1. ..

a. Déterminer domaine de définition de f.

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat.

2. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)+1}{x+1}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

14.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{7+x} & ; x < 1 \\ \frac{4}{1+\sqrt{x}} & ; x \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat.

2. Etudier la continuité de f au point $x_0 = 1$.

15.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par : $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$.

1.

a. Déterminer D_f domaine de définition de f.

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.



c. Montrer que : f est continue sur D_f .

2. ..

a. Etudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0 = -1$.

b. Montrer que : $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$ sur $] -1, +\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur D_f .

d. Montrer que : l'équation $]0, +\infty[$; $f(x) = 0$ admet une unique solution .

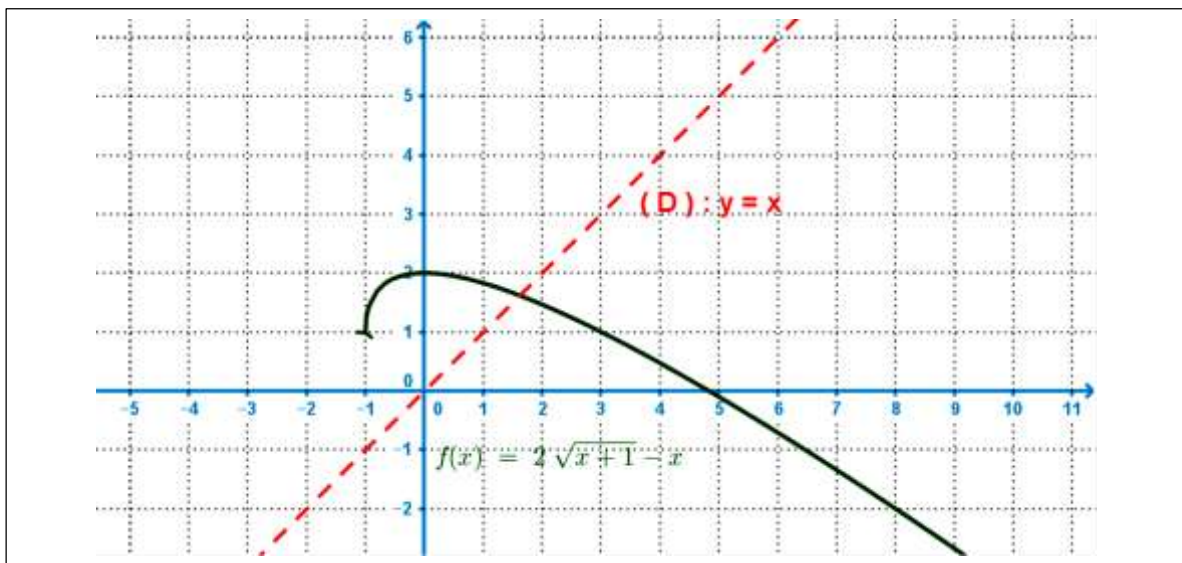
3. .. Soit g la restriction de f sur $]0, +\infty[$.

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .

b. Montrer que : la fonction réciproque g^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c. Calculer : $g(3)$ et $(g^{-1})'(1)$.

d. La figure ci-contre représente la courbe représentative de la fonction f . Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la restriction g^{-1} de la fonction f .



4. ..

a. Vérifier que : $f(x) = 2 - (\sqrt{x+1} - 1)^2$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

b. Déterminer : $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

5. ..

a. Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions (si on a de solutions) des équations suivantes :

- $x \in]-1, +\infty[$; $f(x) = 5$.
- $x \in]-1, +\infty[$; $f(x) = \frac{3}{2}$.
- $x \in]-1, +\infty[$; $f(x) = -1$.